

Für die gemessenen Größen liest man aus Abb. 11 folgende Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} 1/a &= (\sin \alpha)/\lambda_A; & 1/b &= (\cos \alpha)/\lambda_A; \\ 1/c &= (\operatorname{ctg} \beta)/a = (\operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \alpha)/\lambda_A. \end{aligned} \quad (4)$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{(\sin^2 \alpha)/\lambda_A^2 + (\cos^2 \alpha)/\lambda_A^2 + (\operatorname{ctg}^2 \beta \sin^2 \alpha)/\lambda_A^2}} \\ &= \lambda_A / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \sin^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sin \psi = p/b = (\cos \alpha) / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \sin^2 \alpha}. \quad (6)$$

Zur Berechnung des Winkels  $\varphi$  zwischen den Lamellen 1 und 2 mit den Normalen  $p_1$  und  $p_2$  entnimmt man aus Abb. 12 für das Dreieck mit den Seiten  $p_1$ ,  $p_2$  und  $r$  die Beziehung:

$$\cos \varphi = (p_1^2 + p_2^2 - r^2) / (2 p_1 p_2). \quad (7)$$

$$\text{Da} \quad r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \quad (8)$$

wird (7) bei Verwendung von (8), (2) und (3):

$$\cos \varphi = \frac{p_1 p_2}{a_1 a_2} + \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} + \frac{p_1 p_2}{c_1 c_2}. \quad (9)$$

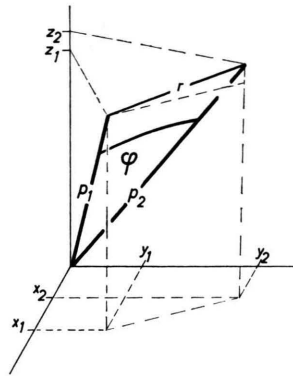


Abb. 12. Skizze zur Ableitung der Formel für die Berechnung des Winkels  $\varphi$  zwischen  $\text{Mg}_3\text{Sb}_2$ -Lamellen im gleichen Matrix-Korn.

Setzt man (4) und (5) in (9) ein, so erhält man:

$$\cos \varphi = \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2}{\sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_1)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 + \operatorname{ctg}^2 \beta_2)}}. \quad (10)$$

## Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen in Halbleitern I Instabilitäten ohne Beachtung von Magnetfeldern

P. H. HANDEL

Institut für Physik der Rumänischen Akademie, Bukarest

(Z. Naturforschg. 21 a, 561—572 [1966]; eingegangen am 12. August 1965)

Im Rahmen eines Versuches, das Funkelrauschen allgemein als Turbulenz im Plasma der Ladungsträger zu deuten, werden vom Oberflächenpotential, von Störstellen oder vom Magnetfeld des Stromes in Halbleitern hervorgerufene fundamentale Instabilitäten und die von ihnen bedingte Turbulenz untersucht. In vorliegender Arbeit I wird nur gezeigt, daß schon ohne Einwirkung irgendwelcher Magnetfelder zwei Arten von Strominstabilitäten in Halbleitern auftreten können: die von starken Inversions- oder Verarmungsschichten hervorgerufenen Oberflächeninstabilitäten (Abschnitt A) und die von KONSTANTINOW und PEREL erhaltenen „Rekombinationswellen“ (B). Erstere treten in der unteren Stufe des hier entwickelten Näherungsverfahrens sogar im stromlosen Halbleiter als neutrale elektrisch nicht nachweisbare, sich im thermischen Gleichgewicht befindende Schwankungen auf. Wird ein elektrisches Feld angelegt, so verlieren sie ihren neutralen Charakter und werden als Stromrauschen nachweisbar. Die Rekombinationswellen kommen nur unter Mitwirkung der Übergänge an Störstellen bei Feldstärken, die einen kritischen, u. a. auch von der Rekombinationsgeschwindigkeit an der Oberfläche abhängigen Wert überschreiten, zustande.

Bei Versuchen an Halbleitern<sup>1-4</sup> wurden in den Jahren 1958—1960 in einem magnetischen Längsfeld Strominstabilitäten festgestellt, sobald das angelegte Magnetfeld einen kritischen (vom elektrischen Feld abhängigen) Wert überschreitet. Auch der

von Gasentladungen bekannte Pinch-Effekt konnte unter speziellen Verhältnissen, bei starken Stromstößen in InSb bemerkt werden<sup>4,5</sup>. Andererseits wurden 1960—1963 die Strominstabilitäten, die in homogenen Halbleitern in Gegenwart eines von

<sup>1</sup> I. L. IWANOW u. S. W. RYWKIN, Zh. Tekhn. Fiz. **28**, 774 [1958].

<sup>2</sup> R. D. LARABEE u. M. C. STEELE, J. Appl. Phys. **31**, 1519 [1960].

<sup>3</sup> B. ANCKER-JOHNSON, R. W. COHEN u. M. GLICKSMAN, Phys. Rev. **124**, 1745 [1961].

<sup>4</sup> M. GLICKSMAN u. R. A. POWLUS, Phys. Rev. **121**, 1659 [1961].

<sup>5</sup> A. G. CHYNOWETH u. A. A. MURRAY, Phys. Rev. **123**, 515 [1961].

außen angelegten magnetischen Längsfeldes erscheinen, theoretisch von GLICKSMAN<sup>6</sup>, HOLTER<sup>7</sup>, GUREWITSCH und IOFFE<sup>8</sup> behandelt. In diesen Arbeiten<sup>6-8</sup> wurde das eigene Magnetfeld des Stromes nicht mit in Betracht gezogen. Tatsächlich ist dieses Eigenfeld bei den in Halbleitern vorkommenden Stromstärken gewöhnlich sehr klein. Vom äußeren angelegten magnetischen Längsfeld erzwungene Instabilitäten werden von uns nicht behandelt. Wir wollen vielmehr die innere Stabilität des Stromflusses untersuchen unter verschiedenen Voraussetzungen, die den konkreten Arbeitsbedingungen der Halbleiterbauelemente nahekommen. Diese Untersuchung wurde im Zusammenhang mit dem Versuch unternommen, eine befriedigende Theorie des Funkelrauschens ( $1/f$ -Rauschen) zu entwickeln (siehe<sup>9</sup>). Es ist wahrscheinlich, daß sogar in scheinbar homogenen Halbleiterproben, die mit OHMSchen Kontakten in einen Stromkreis geschaltet werden, allgemein gewisse Instabilitäten auftreten, die den „laminaren“ Strömungszustand zerstören und ein turbulentes Regime zur Folge haben. Wir untersuchen also die Stabilität in Abwesenheit jeglicher von außen angelegter Magnetfelder.

In der vorliegenden (ersten) Arbeit über Instabilitäten wird überhaupt kein Magnetfeld in Betracht gezogen. Die zweite Arbeit wird die vom eigenen Magnetfeld des Stromes hervorgerufenen Instabilitäten behandeln, und eine dritte bringt ein magneto-hydrodynamisches Turbulenzmodell des Funkelrauschens.

Nachfolgend wird im Abschnitt A die Stabilitätsfrage ohne Mitbeteiligung der als Rekombinationszentren wirkenden Störstellen untersucht, sowohl im homogenen Halbleiter als auch in Gegenwart der Potentialschwelle an der Oberfläche. In Abschnitt B erweitern wir eine Arbeit von KONSTANTINOW und PEREL, die nur unter Mitwirkung der Störstellen zustande kommende Instabilitäten behandelt. In allen Fällen interessieren uns besonders hinreichende Instabilitätsbedingungen.

## A. Stabilität bei konstanter Besetzung der Störstellen

Betrachten wir eine Halbleiterplatte, die in Richtung der  $z$ -Achse von den Ebenen  $z = -L/2$  und  $z = L/2$  begrenzt ist, in der  $x$ - und  $y$ -Richtung aber unendlich ist. In der  $x$ -Richtung wird das elektrische Feld  $E_x$  angelegt. Die Bewegung der Ladungsträger wird durch die Diffusionsgleichungen<sup>10</sup> beschrieben, die im wesentlichen Kontinuitätsgleichungen für die Elektronen und Löcher darstellen. Die in diesen Gleichungen auftretenden Diffusionskoeffizienten  $D_n$ ,  $D_p$  und Beweglichkeiten  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  der Elektronen und Löcher sind durch die EINSTEIN-Beziehung verknüpft und somit nicht unabhängig. Es genügt also, nur zwei Größen einzuführen, die Reibungskoeffizienten  $\nu_n$  und  $\nu_p$ . Diese beschreiben die gemittelte Wechselwirkung der Elektronen und Löcher mit den Phononen des Kristallgitters<sup>11</sup>.

Wir schreiben also die Bewegungsgleichungen (1), (2), die Kontinuitätsgleichungen (3), (4) und die POISSON-Gl. (5) an:

$$\nu_n n \mathbf{v}_n = -e n \mathbf{E} - \nabla P_n, \quad (1)$$

$$\nu_p p \mathbf{v}_p = e p \mathbf{E} - \nabla P_p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n \mathbf{v}_n) = -R(n p - n_i^2), \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p \mathbf{v}_p) = -R(n p - n_i^2), \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{4 \pi e}{\kappa} (p - n - N_A + N_D), \quad (5)$$

$$P_n = n T, \quad P_p = p T. \quad (6)$$

In den Bewegungsgleichungen tritt rechts der Feldstrom und der Diffusionsstrom auf, wobei  $n$ ,  $p$ ,  $P_n$ ,  $P_p$ ,  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_p$  Dichte, Druck und Driftgeschwindigkeit der Elektronen und Löcher bedeuten,  $R$  eine Rekombinationsgeschwindigkeit,  $\kappa$  die dielektrische Konstante des Gitters,  $N_A$  und  $N_D$  Akzeptoren- und Donatoren-Dichten sind. Die mit der BOLTZMANN-Konstanten multiplizierte Temperatur  $T$  (in energetischen Einheiten) wurde für alle Ladungsträger

<sup>6</sup> M. GLICKSMAN, Phys. Rev. **124**, 1655 [1961].

<sup>7</sup> Ø. HOLTER, Phys. Rev. **129**, 2548 [1963].

<sup>8</sup> L. E. GUREWITSCH u. I. W. IOFFE, Fiz. Tverd. Tela **4**, 2641 [1962]; **4**, 2964 [1962] und **5**, 2675 [1963].

<sup>9</sup> P. HANDEL, Rev. Roumaine Physique **7**, 407 [1962].

<sup>10</sup> Siehe z. B. O. MADELUNG, Handbuch der Physik, Bd. XX, II. Teil, S. 121, Gl. (48.1) und (48.2), Springer-Verlag, Berlin 1957, oder W. SHOCKLEY, Electrons and Holes in Semiconductors, Chap. 12, S. 298–299, Gl. (15 a, b) und Gl. (1 a, b), D. Van Nostrand, Princeton, N. J. 1956.

<sup>11</sup> Die Beweglichkeiten und Diffusionskoeffizienten sind dann durch die Beziehungen

$$\mu_n = e/\nu_n, \quad \mu_p = e/\nu_p, \quad D_n = T/\nu_n, \quad D_p = T/\nu_p$$

ausgedrückt, worin  $T$  die mit der BOLTZMANN-Konstanten multiplizierte Temperatur bedeutet. Die „Reibungskoeffizienten“  $\nu_n$  und  $\nu_p$  wurden auch in einer Arbeit des Verf. (Rev. Roumaine Physique **10**, 35 [1965]) eingeführt.

gleich gesetzt, und es wurden isotherme (nicht adiabatische) Prozesse vorausgesetzt, beides wegen der zuvor betonten, starken Kopplung mit den Phononen des Gitters. Wichtig ist, daß im System (1) bis (6) das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  aus der Gl. (5) elektrostatisch bestimmt wird, und daß die elektrische Stromdichte nicht ganz quellenfrei sein muß. In den Gln. (3) und (4) wurde direkte Rekombination angenommen, d. h. ohne Mitbeteiligung von Rekombinationszentren, wie es z. B. im eigenleitenden Halbleiter der Fall ist.

Als ungestörte (laminare) Lösung nehmen wir an

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= \mathbf{E}_x^0 + \mathbf{E}_z^0, \\ E_z^0 &= -\frac{dV^0}{dz} = -\frac{T}{e} \frac{d \ln n^0}{dz} = \frac{T}{e} \frac{d \ln p^0}{dz}; \\ v_p v_p^0 &= -v_n v_n^0 = e E_x^0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (7)$$

Kleine Störungen (die mit einem Strich bezeichnet sind) erfüllen folgende Gleichungen:

$$v_n(n v_n)' = -e n^0 \mathbf{E}' - e n' \mathbf{E}^0 - T \nabla n', \quad (8)$$

$$v_p(p v_p)' = e p^0 \mathbf{E}' + e p' \mathbf{E}^0 - T \nabla p', \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'}{\partial t} + \nabla(n v_n)' &= -R(n^0 p' + p^0 n') \\ &= \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla(p v_p)', \end{aligned} \quad (10)$$

$$\nabla \mathbf{E}' = \frac{4\pi e}{\kappa} (p' - n'). \quad (11)$$

Hier wird (entsprechend der für die Rekombinationsglieder getroffenen Wahl) die Besetzung der Akzeptor- und Donator-Niveaus von der Störung nicht betroffen. Bei genügend langsamen Vorgängen ist das aber nicht der Fall, man darf die Besetzungsschwankungen der lokalisierten Zustände nicht vernachlässigen. Nur für eigenleitende Halbleiter oder bei genügend kleinen Störstellenkonzentrationen ist diese Störung also als allgemein und nicht bedingt anzusehen. In anderen Fällen können Instabilitäten auftreten, selbst wenn alle von uns in (8) – (11) zugelassenen Störungen stabil sind (siehe B).

Wird nun (8) und (9) in (10) eingesetzt, so folgt das System

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{T} \frac{\partial n'}{\partial t} - \beta e^v (p' - n') - n' [\alpha(e^{-v} - 1) - \beta(e^v - 1)] + \frac{dv}{dz} \frac{\partial n'}{\partial z} - \varepsilon_x \frac{\partial n'}{\partial x} - \nabla^2 n' + \beta e^v \frac{dv}{dz} \frac{\partial f}{\partial z} \\ = -Q_n(\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n'), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_p}{T} \frac{\partial p'}{\partial t} + \alpha e^{-v} (p' - n') + p' [\alpha(e^{-v} - 1) - \beta(e^v - 1)] - \frac{dv}{dz} \frac{\partial p'}{\partial z} + \varepsilon_x \frac{\partial p'}{\partial x} - \nabla^2 p' - \alpha e^{-v} \frac{dv}{dz} \frac{\partial f}{\partial z} \\ = -Q_p(\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n'), \end{aligned} \quad (13)$$

$$-\nabla^2 f = p' - n' \quad (14)$$

mit den Bezeichnungen

$$\frac{4\pi e^2}{\kappa T} p_\infty = \alpha, \quad \frac{4\pi e^2}{\kappa T} n_\infty = \beta, \quad \frac{e E_x^0}{T} = \varepsilon_x, \quad \frac{e E_z^0}{T} = \varepsilon_z = -\frac{dv}{dz}, \quad \frac{\kappa}{4\pi e} \mathbf{E}' = -\nabla f, \quad (15)$$

$$Q_p = \frac{\kappa R}{4\pi e^2} v_p, \quad Q_n = \frac{\kappa R}{4\pi e^2} v_n, \quad (16)$$

wo  $p_\infty$  und  $n_\infty$  die Trägerdichten im allseitig unbegrenzten Halbleiter bedeuten. Nehmen wir an, daß die Oberflächenladung auf den Oberflächenzuständen ungestört bleibt, so gelten bei  $z = \mp L/2$  die Randbedingungen

$$n' \frac{dv}{dz} - \frac{\partial n'}{\partial z} + \beta e^v \frac{\partial f}{\partial z} = \mp \sigma_n(\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n'), \quad -p' \frac{dv}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z} - \alpha e^{-v} \frac{\partial f}{\partial z} = \mp \sigma_p(\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n'), \quad (17), (18)$$

worin

$$\sigma_n = \frac{\kappa \Gamma}{4\pi e^2} v_n, \quad \sigma_p = \frac{\kappa \Gamma}{4\pi e^2} v_p \quad (19)$$

und  $\Gamma$  eine flächenhafte Rekombinationsgeschwindigkeit ist. Wir wollen die Randbedingungen (17), (18) „symmetrisch“ nennen. Wir behandeln erst den Fall  $v(\pm L/2) = v_s = 0$  und besprechen nachher auch den Fall  $v_s \neq 0$ .

## § 1. Neutrale Oberflächen

Ist  $v=0$ , so haben die Gln. (12) – (14) konstante Koeffizienten. Indem wir die Gln. (12) und (13) mit  $e^{-st}$  multiplizieren und nach  $t$  integrieren, führen wir die LAPLACE-Transformierten

$$\overline{n'} = \int_0^\infty e^{-st} n' dt, \quad \overline{p'} = \int_0^\infty e^{-st} p' dt \quad (20)$$

ein. Diese kann man als Überlagerung ebener Wellen der Form

$$\overline{n'} = g(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \overline{p'} = h(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (21)$$

betrachten. Man erhält das System

$$\left( \frac{\nu_n}{T} s + k^2 + \beta - i k_x \varepsilon_x + \alpha \varrho_n \right) g - \beta(1 - \varrho_n) h = \frac{\nu_n}{T} n'(\mathbf{k}, 0), \quad (22)$$

$$- \alpha(1 - \varrho_p) g + \left( \frac{\nu_p}{T} s + k^2 + \alpha + i k_x \varepsilon_x + \beta \varrho_p \right) h = \frac{\nu_p}{T} p'(\mathbf{k}, 0), \quad (23)$$

in das die Anfangswerte  $n'(\mathbf{k}, 0) = n'(\mathbf{k}, t)|_{t=0}$  und  $p'(\mathbf{k}, 0)$  eingehen. In der Lösung

$$g = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\nu_n}{T} n'(\mathbf{k}, 0) & -\beta(1 - \varrho_n) \\ \frac{\nu_p}{T} p'(\mathbf{k}, 0) & \frac{\nu_p}{T} s + k^2 + \alpha + i k_x \varepsilon_x + \beta \varrho_p \end{vmatrix}; \quad h = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\nu_n}{T} s + k^2 + \beta - i k_x \varepsilon_x + \alpha \varrho_n & \frac{\nu_n}{T} n'(\mathbf{k}, 0) \\ -\alpha(1 - \varrho_p) & \frac{\nu_p}{T} p'(\mathbf{k}, 0) \end{vmatrix} \quad (24)$$

ist die Determinante

$$D = \nu_n \nu_p \left( \frac{s}{T} \right)^2 + [(\nu_n + \nu_p) k^2 + \alpha(\nu_n + \nu_p \varrho_n) + \beta(\nu_p + \nu_n \varrho_p) + (\nu_n - \nu_p) i k_x \varepsilon_x] \frac{s}{T} + k^4 + k^2[\alpha(1 + \varrho_n) + \beta(1 + \varrho_p)] + (\alpha \varrho_n + \beta \varrho_p)(\alpha + \beta) + \varepsilon_x^2 k_x^2 + i \varepsilon_x k_x (\beta - \alpha + \alpha \varrho_n - \beta \varrho_p). \quad (25)$$

$$\text{Ist } s_1 \text{ eine von den beiden Wurzeln der Gleichung } D(s) = 0, \quad (26)$$

$$\text{so kann man beweisen, daß immer die Ungleichung } \operatorname{Re} s_1 \leq 0 \quad (27)$$

gilt. Löst man Gl. (26), so sieht man tatsächlich, daß nur dann  $\operatorname{Re} s_1 > 0$  sein kann, wenn

$$k_x^2 \varepsilon_x^2 \{ [(\nu_n - \nu_p) c - 2 \nu_n \nu_p (\nu_n - \nu_p) (\beta - \alpha + \alpha \varrho_n - \beta \varrho_p)]^2 - c^2 (\nu_n + \nu_p)^2 \} > \\ > 4 \nu_n \nu_p [k^4 + k^2(\alpha \varrho_n + \beta \varrho_p + \alpha + \beta) + (\alpha \varrho_n + \beta \varrho_p)(\alpha + \beta)]$$

ist, worin  $c \equiv (\nu_n + \nu_p) k^2 + \alpha(\nu_n + \varrho_n \nu_p) + \beta(\nu_p + \varrho_p \nu_n)$ . Das kann aber auch nur geschehen, falls die geschwungene Klammer von links positiv ist, d. h. schließlich

$$2 \nu_p (\nu_p + \nu_n) (\beta + \alpha \varrho_n + k^2) < 0 \quad \text{oder} \quad 2 \nu_n (\nu_p + \nu_n) (\alpha + \beta \varrho_p + k^2) < 0,$$

was ausgeschlossen ist, da alle hier vorkommenden Größen positiv sind.

Geht man wieder von  $g$  und  $h$  zu  $n'(\mathbf{r}, t)$  und  $p'(\mathbf{r}, t)$  über, so ist

$$n'(\mathbf{r}, t) = \frac{T e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{s_1 - s_2} \begin{vmatrix} \frac{n'(\mathbf{k}, 0)}{\nu_p} & -\beta(1 - \varrho_n) (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ \frac{p'(\mathbf{k}, 0)}{\nu_n} & e^{s_1 t} \left( \frac{\nu_p}{T} s_1 + k^2 + \alpha + i k_x \varepsilon_x + \beta \varrho_p \right) - e^{s_2 t} \left( \frac{\nu_p}{T} s_2 + k^2 + \alpha + i k_x \varepsilon_x + \beta \varrho_p \right) \end{vmatrix} \quad (28)$$

$$p'(\mathbf{r}, t) = \frac{T e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{s_1 - s_2} \begin{vmatrix} e^{s_1 t} \left( \frac{\nu_n}{T} s_1 + k^2 + \beta - i k_x \varepsilon_x + \alpha \varrho_n \right) - e^{s_2 t} \left( \frac{\nu_n}{T} s_2 + k^2 + \beta - i k_x \varepsilon_x + \alpha \varrho_n \right) & \frac{n'(\mathbf{k}, 0)}{\nu_p} \\ -\alpha(1 - \varrho_p) (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) & \frac{p'(\mathbf{k}, 0)}{\nu_n} \end{vmatrix},$$

wobei  $s_1$  und  $s_2$  die beiden Wurzeln von  $D$  sind. Laut (27) liefert die Gl. (28) stets ein Abklingen der von uns betrachteten Störung von den Anfangswerten  $n'(\mathbf{r}, 0) = n'(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  und  $p'(\mathbf{r}, 0) = p'(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  bis zu 0. Der Stromfluß in Abwesenheit der Störstellen kann also bei fehlender Oberflächenladung nur unter Einwirkung des eigenen Magnetfeldes instabil werden.



Um die Randbedingungen zu erfüllen, betrachten wir als Störung eine Überlagerung zweier Lösungen der Form (28) mit gleichen  $k_x$ - und  $k_y$ -Komponenten, aber mit verschiedenem Vorzeichen der Komponente  $k_z$ . Da  $k_z$  nur quadratisch in  $s_1$  und  $s_2$  eingeht, erhält man die gesuchte Überlagerung, indem man in (28)  $e^{ikr}$  durch  $(A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) e^{i(k_x x + k_y y)}$  mit  $A^2 + B^2 = 1$  ersetzt. Eliminieren wir nun  $f$  auch aus den Randbedingungen (17) und (18), so folgt

$$\frac{\partial}{\partial z} (\alpha n' + \beta p') = \pm (\alpha \sigma_n + \beta \sigma_p) (\alpha n' + \beta p') \dots z = \mp L/2. \quad (29)$$

$A$  und  $B$  sind also aus den Gleichungen

$$\frac{d}{dz} (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) = \pm \gamma (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) \dots z = \mp L/2 \quad (30)$$

mit  $\gamma \equiv \alpha \sigma_n + \beta \sigma_p$  zu bestimmen. Das liefert nur dann eine von 0 verschiedene Lösung, wenn  $k_z = k_z^{(n)}$  ist, d. h. eine Wurzel der transzendenten Gleichung<sup>12</sup>

$$\operatorname{tg} k_z^{(n)} L = 2 \gamma k_z^{(n)} / (k_z^{(n)2} - \gamma^2) \quad (31)$$

ist. Da  $\gamma$  nie ganz genau gleich Null sein kann, folgt aus (30) für  $k_z^{(0)} = 0$ ,  $n' = p' = 0$ . Die Wurzel mit kleinstem Absolutwert [die laut Gl. (25), (26) am langsamsten abklingt] ist  $k_z^{(1)}$ . Man sieht mittels graphischer Lösung von (31), daß

$$\frac{\pi}{2L} < k_z^{(1)} < \frac{\pi}{2} \text{ für } \gamma L > \frac{\pi}{2}, \quad \gamma < k_z^{(1)} < \frac{\pi}{2L} \text{ für } \gamma L < \frac{\pi}{2} \text{ und sogar } \gamma < k_z^{(1)} \ll \frac{\pi}{2L} \text{ für } \gamma L \ll \frac{\pi}{2L}$$

gilt (Fall der schwachen Oberflächenrekombination und kleiner Proben). Liegt nicht gerade dieser letzte Fall vor, so kann also  $k_z$  größenordnungsmäßig nicht viel kleiner als  $1/L$  werden. Ist der Halbleiter auch in der  $y$ -Richtung begrenzt, so ist für  $k_y$  dieselbe Überlegung wie für  $k_z$  durchzuführen. Man hat nur  $L$  durch  $L_y$  zu ersetzen. Die Anfangswerte  $n'(k, 0)$  und  $p'(k, 0)$  sind vorgegeben und bleiben hier unbestimmt.

Wir können (28) auch als Überlagerung von 2 Wellen, von denen eine  $\sim e^{s_1 t}$  und die andere  $\sim e^{s_2 t}$  abklingt, auffassen. Setzen wir nun einen Augenblick in (25) und (26)  $v_n = v_p$  und  $q_n = q_p = 0$ , so folgt

$$\frac{v}{T} s_{1,2} = -k^2 - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2} - \varepsilon_x^2 k_x^2 - i(\beta - \alpha) \varepsilon_x k_x}. \quad (32)$$

Bei  $\varepsilon_x \rightarrow 0$  tritt die Lösung  $\sim e^{s_1 t}$  in (28) mit gleichen Koeffizienten für  $n'$  und  $p'$  auf, d. h. für diese Lösung wird bei  $\varepsilon_x k_x \rightarrow 0$  zugleich auch  $n' = p'$ , wie man mit Hilfe von (32) feststellt. Wir nennen sie deswegen „neutrale“ oder „akustische“ Lösung. Die Lösung  $\sim e^{s_2 t}$  ergibt im selben Grenzfall  $\alpha n' = -\beta p'$ , kann also „elektrisch“ oder „optisch“ heißen. Natürlich ist außerhalb dieses Grenzfalles die akustische Lösung nicht ganz neutral, und auch bei der optischen ist  $\alpha n' + \beta p'$  nicht genau gleich Null. Diese Benennung ist der bei Plasmaschwingungen in ionisierten Gasen oder bei Gitterschwingungen in Kristallen üblichen analog und entspricht damit dem Wesen der so erhaltenen Schwingungstypen.

## § 2. Geladene Oberflächen

Ist  $v \neq 0$ , d. h. ist eine Oberflächenladung vorhanden, so kann man das eben angeführte Verfahren bestenfalls als eine Näherung anwenden, falls die Oberflächen-Potentialschwelle  $|v_s|$  klein ist, so daß sich die Koeffizienten in (12) – (14) viel langsamer ändern als die Störung und infolgedessen konstant angenommen werden können. Um den allgemeinen Fall zu besprechen, in dem  $|v_s|$  keineswegs klein ist und die Energiebänder in der Nähe der Oberfläche stark gekrümmt sind, wollen wir in (12) – (14) von der Veränderlichen  $z$  zu  $v = eV/T$  übergehen. Nehmen wir an, die Halbleiterplatte sei viel dicker als die DEBYE-Länge ( $L \gg L_D$ ), so ist  $0 < |v| \leq |v_s|$ , weil fern von der Oberfläche  $v \approx 0$  gesetzt wird und  $v_s$  den Wert auf den Oberflächen  $z = \pm L/2$  bezeichnet. Aus der Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\alpha (e^{-v} - 1) + \beta (e^v - 1) \equiv a'(v) \quad (33) \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 = a(v). \quad (34)$$

<sup>12</sup> Siehe auch die allgemeine Besprechung von (31) bei Gl. (26) im Abschnitt B.

Dabei ist  $a$  und seine Ableitung nach  $v$ :

$$a \equiv \alpha(e^{-v} + v - 1) + \beta(e^v - v - 1), \quad a' \equiv -\alpha(e^{-v} - 1) + \beta(e^v - 1). \quad (35)$$

Wir beschränken uns auf homogene Halbleiteroberflächen mit demselben Wert von  $v_s$  bei  $z = L/2$  und  $z = -L/2$  und auf Störungen, die symmetrisch sind gegenüber der Mittelebene  $z = 0$ .

Bezeichnen wir diesmal mit  $\mathbf{k}$  einen Fortpflanzungsvektor in der  $xy$ -Ebene und gehen wir von  $z$  über zu  $v$ , so ergibt sich aus (12) – (14) für die Störung das Gleichungssystem

$$\left[ \frac{\nu_n}{T} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 - i \varepsilon_x k_x + a' + \beta e^v + \alpha \varrho_n e^{-v} + (2a - a') \frac{\partial}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] n' - \beta(1 - \varrho_n) e^v p' = -2a \beta e^v \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (36)$$

$$-\alpha(1 - \varrho_p) e^{-v} n' + \left[ \frac{\nu_p}{T} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 + i \varepsilon_x k_x - a' + \alpha e^{-v} + \beta \varrho_p e^v - (2a + a') \frac{\partial}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] p' = 2a \alpha e^{-v} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (37)$$

$$-a' \frac{\partial f}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = p' - n' \quad (38)$$

und aus (17), (18) folgen die Randbedingungen:

$$n', p', f \text{ endlich bei } v = 0, \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} n' - \frac{\partial n'}{\partial v} + \beta e^v \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\sigma_n}{\sqrt{2}a} (\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n') \operatorname{sign} v \\ p' + \frac{\partial p'}{\partial v} + \alpha e^{-v} \frac{\partial f}{\partial v} &= -\frac{\sigma_p}{\sqrt{2}a} (\beta e^v p' + \alpha e^{-v} n') \operatorname{sign} v \end{aligned} \right\} \text{ bei } v = v_s. \quad (40)$$

Eliminiert man hier  $f$ , so folgt die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial v} (\alpha e^{-v} n' + \beta e^v p') = -\frac{\alpha e^{-v} \sigma_n + \beta e^v \sigma_p}{\sqrt{2}a} (\alpha e^{-v} n' + \beta e^v p') \operatorname{sign} v \text{ für } v = v_s. \quad (41)$$

Es ist zweckmäßig, neue unbekannte Funktionen einzuführen durch die Gln. (42):

$$\alpha n' e^{-v} = \psi, \quad \beta p' e^v = \varphi, \quad \alpha \beta f = \chi. \quad (42)$$

Man erhält so das System

$$\left[ \frac{\nu_n}{T} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 + \beta e^v + \alpha e^{-v} \varrho_n - i \varepsilon_x k_x - (a' + 2a) \frac{\partial}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \psi - \alpha e^{-v} (1 - \varrho_n) \varphi = -2a \frac{\partial \chi}{\partial v}, \quad (43)$$

$$-\beta e^v (1 - \varrho_p) \psi + \left[ \frac{\nu_p}{T} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 + \alpha e^{-v} + \beta e^v \varrho_p + i \varepsilon_x k_x - (a' - 2a) \frac{\partial}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \varphi = 2a \frac{\partial \chi}{\partial v}, \quad (44)$$

$$\left( k^2 - a' \frac{\partial}{\partial v} - 2a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \chi = \alpha e^{-v} \varphi - \beta e^v \psi, \quad (45)$$

mit der Randbedingung

$$\left. \begin{aligned} \varphi, \psi, \chi \text{ endlich bei } v = 0 \text{ und} \\ \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial v} = -\frac{\alpha e^{-v} \sigma_n + \beta e^v \sigma_p}{\sqrt{2}a} (\psi + \varphi) \operatorname{sign} v \end{aligned} \right\} \text{ bei } v = v_s. \quad (46)$$

Suchen wir nun nach Lösungen der Form

$$\psi = e^{st} u^r \sum_{l=0}^{\infty} b_l v^l, \quad \varphi = e^{st} u^r \sum_{l=0}^{\infty} c_l v^l, \quad \chi = e^{st} u^r \sum_{l=0}^{\infty} a_l v^l, \quad (47)$$

worin

$$\operatorname{Re} r \geq 0, \quad u = v/v_s \quad \text{und} \quad 0 < u \leq 1 \quad (48)$$

ist<sup>13</sup>, so erhalten wir für  $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \dots$  Gleichungssysteme, wenn wir auch die Koeffizienten

<sup>13</sup> Die Lösung (57) mit  $\operatorname{Re} r < 0$  wächst fern von der Oberfläche ins Unendliche. Sie muß also ausgeschieden werden,

da wir nur die Stabilität kleiner, überall begrenzter Störungen untersuchen.

aus Gln. (43) – (45) in Potenzen von  $v$  entwickeln, mit

$$a = \frac{\alpha+\beta}{2!} v^2 + \frac{\beta-\alpha}{3!} v^3 + \frac{\alpha+\beta}{4!} v^4 + \dots, \quad a' = (\alpha+\beta) v + \frac{\beta-\alpha}{2!} v^2 + \frac{\alpha+\beta}{3!} v^3 + \dots \quad (49)$$

und entsprechend für  $e^v$  und  $e^{-v}$ . Wir eliminieren die  $a_l$  und wollen schließlich die Systeme anschreiben, beschränken uns aber auf den Fall  $v_n = v_p$ ,  $q_n = q_p$ ,  $\sigma_n = \sigma_p$ , um die Formeln zu verkürzen:

$$\begin{cases} (\xi_0 + \beta - i \varepsilon_x k_x) b_0 - \alpha c_0 = 0, & \xi_0 \equiv \frac{\nu}{T} s + k^2 - (\alpha + \beta) r^2, \\ -\beta b_0 + (\xi_0 + \alpha + i \varepsilon_x k_x) c_0 = 0, \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} (\xi_1 + \beta - i \varepsilon_x k_x) b_1 - \alpha c_1 = \left( -\beta + \frac{5\alpha+7\beta}{6} r + \frac{\beta-\alpha}{3} r^2 \right) b_0 - \alpha c_0 - (\alpha + \beta) r \frac{\alpha c_0 - \beta b_0}{k^2 - (\alpha + \beta) r^2}, \\ -\beta b_1 + (\xi_1 + \alpha + i \varepsilon_x k_x) c_1 = \beta b_0 + \left( \alpha - \frac{7\alpha+5\beta}{6} r + \frac{\beta-\alpha}{3} r^2 \right) c_0 + (\alpha - \beta) r \frac{\alpha c_0 - \beta b_0}{k^2 - (\alpha + \beta) r^2}, \end{cases} \quad (51)$$

$$\xi_1 \equiv \frac{\nu}{T} s + k^2 - (\alpha + \beta) (r+1)^2,$$

$$\begin{cases} (\xi_n + \beta - i \varepsilon_x k_x) b_n - \alpha c_n = G_n(b_0, c_0, r, k, \alpha, \beta), & \xi_n \equiv \frac{\nu}{T} s + k^2 - (\alpha + \beta) (r+n)^2, \\ -\beta b_n + (\xi_n + \alpha + i \varepsilon_x k_x) c_n = H_n(b_0, c_0, r, k, \alpha, \beta), \end{cases} \quad (52)$$

Die Lösung kann nur existieren, wenn die Determinante des ersten angeschriebenen Systems verschwindet:

$$\Delta_0 \equiv \xi_0^2 + (\alpha + \beta) \xi_0 + \varepsilon_x^2 k_x^2 + i \varepsilon_x k_x (\beta - \alpha) = 0; \quad \xi_0 = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \varepsilon_x^2 k_x^2 - i \varepsilon_x k_x (\beta - \alpha)}, \quad (53)$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{\nu}{T} s_{1,2} = (\alpha + \beta) (r^2 - \frac{1}{2}) - k^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \varepsilon_x^2 k_x^2 - i \varepsilon_x k_x (\beta - \alpha)}. \quad (54)$$

Die Determinanten

$$\Delta_n = \xi_n^2 + (\alpha + \beta) \xi_n + \varepsilon_x^2 k_x^2 + i \varepsilon_x k_x (\beta - \alpha) = n(2r+n)(\alpha + \beta) [(2rn - n^2 - 1)(\alpha + \beta) - 2\xi_0]$$

sind dann von Null verschieden. Für  $r=0$  stimmt das mit Gl. (32) [allgemein mit (26)] überein, und folglich sind die Lösungen mit  $r=0$  stabil. Ist jedoch  $\text{Re}(r^2) > 0$  genügend groß, so muß Instabilität auftreten. Wir fragen also, ob es physikalisch sinnvolle Lösungen mit genügend großem, positivem  $r^2$  gibt, die die Randbedingung

$$r \sum_{l=0}^{\infty} (b_l + c_l) v_s^l = - \sum_{l=0}^{\infty} (b_l + c_l) v_s^l \left[ l + \frac{\alpha e^{-v_s} + \beta e^{v_s}}{\sqrt{2} a(v_s)} \sigma |v_s| \right], \quad (55)$$

wie sie aus (46) hervorgeht, erfüllen. Entwickelt man auch den Ausdruck in der eckigen Klammer von (55), so folgt

$$r = -\sigma \sqrt{\alpha + \beta} - \left[ \frac{5}{6} \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \sigma \sqrt{\alpha + \beta} + \frac{b_1 + c_1}{b_0 - c_0} \right] v_s + \dots \quad (56)$$

$$\text{Für } v_s = 0 \text{ würde also} \quad r = -\sigma \sqrt{\alpha + \beta} \quad (57)$$

folgen, was der Bedingung  $\text{Re } r \geq 0$  [Gl. (48)] widerspricht<sup>13</sup>.

Bei  $v_s = 0$  ist der Übergang von  $z$  zu  $v$  nicht mehr möglich, wohl aber der zu  $u$ . Entsprechend dem in § 1 angewendeten Verfahren suchen wir in diesem Fall Lösungen mit  $\text{Re } r = 0$ , d. h.  $r = i r'$  in Gl. (47), die die Randbedingung (46) bei  $v_s = 0$  erfüllen:

$$\psi = B u^{ir'} + B^* u^{-ir'}, \quad \varphi = C u^{ir'} + C^* u^{-ir'}; \quad (58)$$

$$\psi + \varphi = A u^{ir'} + A^* u^{-ir'}, \quad A = B + C. \quad (59)$$

Das Sternchen bezeichnet die konjugierte komplexe Größe. Aus (46) folgt dann für  $u=1$

$$r'(A-A^*)=F(A+A^*); \quad F \equiv -\frac{\alpha \sigma_n + \beta \sigma_p}{\sqrt{\alpha+\beta}}, \quad (60) \quad \text{und} \quad r' = F \frac{\operatorname{Re} A}{\operatorname{Im} A} \quad (61)$$

ist im wesentlichen die in § 1 dem Fall  $L \rightarrow \infty$  entsprechende Lösung<sup>14</sup>.

Diese für  $v_s=0$  erhaltene Lösung ergibt  $r^2 = -r'^2 < 0$  und ist somit stabil.

Ist  $v_s \neq 0$ , so müssen wir auch das System (51) lösen und den Bruch  $(b_1+c_1)/(b_0+c_0)$  in (56) einsetzen, um wenigstens die in  $v_s$  lineare, erste Näherung zu erhalten. Bei besonders großen  $v_s$ -Werten müssen wir uns die Mühe nehmen, noch ein Paar Systeme (52) zu lösen, um in (56) auch höhere Potenzen von  $v_s$  zu berücksichtigen. Machen wir nur den ersten Schritt, so erhalten wir

$$r = -\sigma \sqrt{\alpha+\beta} - v_s \left\{ \frac{5}{6} \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} \sigma \sqrt{\alpha+\beta} + \frac{[\xi_0 - 2r(\alpha+\beta)] \mathcal{P} + i \varepsilon_x k_x \mathcal{I}}{4 i \varepsilon_x k_x (2r+1)(\alpha+\beta)[r(\alpha+\beta)-\xi_0]} \right\}, \quad (62)$$

worin

$$\mathcal{P} \equiv i \varepsilon_x k_x \frac{1}{3} r(\beta-\alpha)(1+2r) + 2r(\alpha+\beta) \xi_0, \quad \mathcal{I} \equiv 2 i \varepsilon_x k_x (\alpha+\beta)(r-1) + (\alpha-\beta)(2-\frac{1}{3}r - \frac{2}{3}r^2) \xi_0 \quad (63)$$

und

$$\xi_0 \equiv -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2} - \varepsilon_x^2 k_x^2 + i \varepsilon_x k_x (\alpha-\beta)}, \quad (64)$$

mit dem oberen Vorzeichen für die „neutrale“ und mit dem unteren für die „elektrische“ Welle. Gl. (62) bestimmt  $r$  für die beiden Lösungstypen bei vorgegebenen Werten von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k^2$  und  $\varepsilon_x k_x$ . Die entsprechenden  $s$ -Werte folgen dann gemäß Gl. (50):

$$\frac{\nu}{T} s = \xi_0 - k^2 + (\alpha+\beta) r^2. \quad (65)$$

Man bemerkt nun folgendes:

1) Gl. (62) ist invariant bei einer Ladungsspiegelung  $\alpha \longleftrightarrow \beta$ ,  $v_s \rightarrow -v_s$ ,  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ . Tatsächlich ist  $\mathcal{P}$  ein paariger,  $\mathcal{I}$  aber ein unpaariger Ausdruck, so daß in (62) die geschwungene Klammer unpaarig ist. Ändert man also den Leitungstypus des Halbleiters ( $p \longleftrightarrow n$ ) gleichzeitig mit dem Vorzeichen des Oberflächenpotentials, so bleiben alle Stabilitätsaussagen ungeändert gültig.

2) Eine notwendige Bedingung für  $\operatorname{Re} r > 0$  ist, daß der Realteil der geschwungenen Klammer in (62) das umgekehrte Vorzeichen von  $v_s$  hat. Das erste Glied der geschwungenen Klammer erfüllt diese Bedingung, falls eine Inversions- oder Verarmungsschicht an der Oberfläche vorliegt, und begünstigt somit die Inversionsschichten für das Auftreten von Instabilitäten.

3) Da bei  $v_s=0$  Stabilität herrscht und  $r < 0$  ist, muß  $|v_s|$  eine gewisse Grenze überschreiten, damit aus (62) prinzipiell positive Realteile von  $r$  hervorgehen können.

4) Die zulässigen  $r$ -Werte müssen außer  $\operatorname{Re} r > 0$  auch die Bedingung  $|r| < 1$  erfüllen. Tatsächlich entsprechen Lösungen mit  $|r| > 1$  im homogenen Fall den Wellen mit Fortpflanzungsvektoren, deren Länge größer als die DEBYE-Länge  $1/\sqrt{\alpha+\beta}$  ist. Solche kurzwellige Störungen klingen aber bekanntlich sehr rasch ab, wegen der diskreten Teilchenstruktur des Plasmas.

Im Fall kleiner  $\varepsilon_x k_x$ -Werte wird in (62) für die „neutrale“ Welle

$$\xi_0 = -2 \varepsilon_x^2 k_x^2 \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} - 2 \varepsilon_x^3 k_x^3 \frac{(\alpha-\beta)^3}{(\alpha+\beta)^5} + i \varepsilon_x k_x \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + 2 i \varepsilon_x^3 k_x^3 \frac{\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)^3} + \dots \quad (66)$$

und für die „elektrische“  $\xi_0 = -(\alpha+\beta) + 2 \varepsilon_x^2 k_x^2 \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} - i \varepsilon_x k_x \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \dots \quad (67)$

In diesem letzten Fall strebt  $b_0+c_0$  zu Null, wenn  $\varepsilon_x k_x \rightarrow 0$ , so daß aus Gl. (55) für kleine  $|v_s|$ -Werte (Gleichheit der Glieder mit  $l=1$ )

$$r = -(1 + \sigma \sqrt{\alpha+\beta}) \quad (\varepsilon_x k_x = 0, v_s \neq 0, \text{ elektrische Welle})$$

folgt und also keine physikalisch sinnvolle Lösung vorliegt.

<sup>14</sup> Alle in § 2 erhaltenen Aussagen beziehen sich auf den Fall  $L \gg L_D$ , sind also nur für  $L \rightarrow \infty$  ganz streng gültig. So ist durch (61) jeder  $r'$ -Wert erlaubt, obwohl selbst bei großem  $L$  stets nur diskrete, allerdings sehr dicht aneinander-

liegende Werte von  $r' = k_z^{(n)}/\sqrt{\alpha+\beta}$  in (31) zugelassen sind. Die völlige Analogie mit § 1 ist im Grenzfall  $v \rightarrow 0$  durch die aus (34) und (49) hervorgehende Gleichung  $u = \exp[\sqrt{\alpha+\beta}(|z| - \frac{1}{2}L)]$  gegeben.

Im Fall der „neutralen“ Lösung folgt für  $\varepsilon_x k_x \rightarrow 0$  aus (62) die Gleichung

$$2(1+\eta)r^2 + (1+2\xi-5\eta-10\xi\eta)r + \xi - 5\xi\eta = 0, \quad (68)$$

worin  $\xi \equiv \sigma\sqrt{\alpha+\beta} > 0$  und  $\eta \equiv \frac{v_s}{6} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$  ist. In der  $\xi\eta$  Halbebene mit  $\xi > 0$  sind die Wurzeln  $r_+$  und  $r_-$  von Gl. (68) außerhalb eines schmalen Streifens entlang der Geraden  $\eta = \frac{1}{5}$  real. Für  $\eta < -1$  ist die eine Wurzel negativ, die andere ist zwar positiv, aber stets größer als 2,5. Für  $-1 < \eta < 0$  sind beide Wurzeln negativ. Also erscheinen im Fall  $\eta \leq 0$  (Anreicherungsschicht) keine physikalisch sinnvolle instabile Lösungen, und auch für  $\varepsilon_x k_x \neq 0$  sind Instabilitäten unwahrscheinlich.

Für  $\eta > 0$  (Verarmungs- oder Inversionsschicht) treten hingegen instabile, physikalisch sinnvolle neutrale Lösungen auf. Tatsächlich ist für  $0 < \eta \leq \frac{1}{5}$  zwar  $\text{Re } r \leq 0$  für beide Wurzeln, für  $\eta > \frac{1}{5}$  ist jedoch  $r_+ > 0$ . Für  $\eta > \frac{1}{5}$  wächst  $r_+$  monoton von 0 bis 2,5 an, mit einer Steigung, die mit  $\xi$  zunimmt. Das Intervall mit instabilen  $\eta$ -Werten verengt sich also mit wachsender Oberflächenrekombination. Aus Gl. (65) folgt dann für die neutrale Lösung bei  $\varepsilon_x k_x = 0$  und  $\eta > \frac{1}{5}$

$$\frac{\nu}{T} s = -k^2 + (\alpha + \beta) r^2, \quad (69)$$

und dieser Ausdruck ist für  $k^2 < (\alpha + \beta) r^2$  positiv.

Das Ergebnis dieser ersten Näherungsrechnung zeigt also, daß bei genügend großem Oberflächenpotential in Inversions- oder Verarmungsschichten neutrale Instabilitäten auftreten. Die hinreichende Instabilitätsbedingung  $\eta > \frac{1}{5}$  lautet mit den üblichen Bezeichnungen

$$\frac{p-n}{p+n} V_s > \frac{6}{5} \frac{kT}{e}, \quad (70)$$

wobei  $V_s$  das Oberflächenpotential,  $p, n$  die Konzentrationen der Ladungsträger im unbegrenzten Halbleitermaterial,  $k$  die BOLTZMANN-Konstante und  $T$  die Temperatur in °K bedeuten.

Wird ein elektrisches Feld angelegt ( $\varepsilon_x k_x \neq 0$ ), so verlieren diese Instabilitäten allmählich ihren neutralen Charakter, und die so entstandenen turbulenten Feld- und Potentialschwankungen werden elektrisch nachweisbar. Niederfrequente, von der Oberfläche gesteuerte Schwankungen, die allgemein bei beliebig kleinen angelegten elektrischen Feldstärken erscheinen, sind experimentell als Funkelrauschen in Halbleitern bekannt. Die von oberflächhaften Potentialschwellen hervorgerufenen Instabilitäten und Turbulenzprozesse könnten bei dem Zustandekommen des Funkelrauschens eine wichtige Rolle spielen.

## B. Von den Übergängen an Störstellen hervorgerufene Instabilitäten

KONSTANTINOW und PEREL<sup>15</sup> haben im Fall des homogenen Halbleiters (ohne Oberflächenladung, ohne Randbedingungen, unter Beschränkung auf eine Dimension) unter gewissen speziellen Bedingungen die Existenz der sog. Rekombinationswellen, die sich von selbst verstärken, theoretisch festgestellt. Dabei wurde das elektrische Feld aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx} (p v_p - n v_n) = 0$$

ermittelt. Wir werden nun diese Behandlungsweise verallgemeinern und die Randbedingungen für den 3-dimensionalen Fall anwenden. Dieselbe Halbleiterplatte wie unter A behandeln wir nun ausgehend von den Kontinuitäts- und Bewegungs-Gleichungen (siehe<sup>10</sup>):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n v_n) = -\varrho_n(n - n_0), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p v_p) = -\varrho_p(p - p_0), \quad (2)$$

$$v_n n v_n = -e n \mathbf{E} - T \nabla n, \quad (3)$$

$$v_p p v_p = e p \mathbf{E} - T \nabla p, \quad (4)$$

$$\nabla(n v_n) = \nabla(p v_p). \quad (5)$$

Bezeichnen wir kleine Störungen der stationären Plasma-Konfiguration mit einem Strich, die ungestörten Glieder aber mit dem Index 0, so wird

$$v_n(n v_n)' = -e n' \mathbf{E}^0 - e n^0 \mathbf{E}' - T \nabla n \quad (6)$$

und

$$v_n \nabla(n v_n)' = -e \mathbf{E}^0 \nabla n' - e n^0 \nabla \mathbf{E}' - T \nabla^2 n', \quad (7)$$

$$v_p \nabla(p v_p)' = e \mathbf{E}^0 \nabla p' + e p^0 \nabla \mathbf{E}' - T \nabla^2 p'. \quad (8)$$

<sup>15</sup> Vorgetragen bei der Sommerschule für Festkörpertheorie, Leningrad, Juni 1964; in Fiz. Tverd. Tela 6, 3364 [1964] erschienen. Den Verfassern danke ich herzlich für die freundlichen Besprechungen.

Aus (5) folgt dann

$$e \left( \frac{p^0}{\nu_p} + \frac{n^0}{\nu_n} \right) \nabla \mathbf{E}' = -e \mathbf{E}^0 \left( \frac{1}{\nu_n} \nabla n' + \frac{1}{\nu_p} \nabla p' \right) + \frac{T}{\nu_p} \nabla^2 p' - \frac{T}{\nu_n} \nabla^2 n', \quad (9)$$

und setzt man (9) in (7) oder (8) ein, so folgt

$$\nabla (n v_n)' = c_n \mathbf{u} \nabla p' - c_p \mathbf{u} \nabla n' - c_n D \nabla^2 p' - c_p D \nabla^2 n', \quad (10)$$

worin

$$\mathbf{u} \equiv \frac{p^0 + n^0}{\nu_n p^0 + \nu_p n^0} e \mathbf{E}, \quad D \equiv \frac{T}{e} \frac{n^0 + p^0}{\nu_n p^0 + \nu_p n^0},$$

$$c_n \equiv \frac{n^0}{p^0 + n^0}, \quad c_p \equiv \frac{p^0}{p^0 + n^0}, \quad (11)$$

bzw. eine Driftgeschwindigkeit, eine Diffusionskonstante, sowie die Elektronen- und Löcher-Anteile bezeichnen. Sucht man Störungen  $n'$ ,  $p' \sim e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  und nimmt man  $\mathbf{E}^0 \parallel \text{OX}$  an, so folgen aus (1) und (2) die Gleichungen

$$(-i\omega + \varrho_n - i u k_x c_p + D k^2 c_p) n' + (i u k_x c_n + D k^2 c_n) p' = 0, \quad (12)$$

$$(-i u k_x c_p + D k^2 c_p) n' + (-i\omega + \varrho_p + i u k_x c_n + D k^2 c_n) p' = 0, \quad (13)$$

die die Dispersionsbeziehung

$$(\omega + a_1)(\omega + a_2) + c_n c_p (u^2 k_x^2 + D^2 k^4) = 0 \quad (14)$$

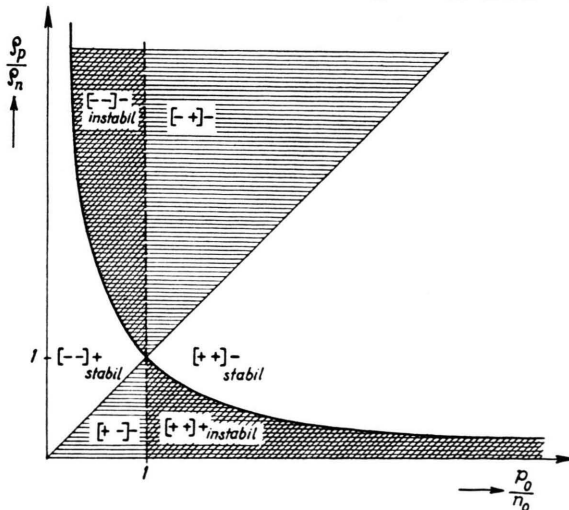
$$u^2 k_x^2 [\varrho_n + \varrho_p + k^2 D (c_p - c_n) + \varrho_n c_n - \varrho_p c_p] (\varrho_n c_n - \varrho_p c_p) > (\varrho_n + \varrho_p + k^2 D)^2 [\varrho_n \varrho_p + k^2 D (c_p \varrho_p + c_n \varrho_n)]. \quad (19)$$

Diese kann nur dann erfüllt werden, wenn es  $k$ -Werte mit  $k^2 > k_{\min}^2$  gibt, für die

$$[(\varrho_n c_p - \varrho_p c_n) + k^2 D (c_p - c_n)] (\varrho_n c_n - \varrho_p c_p) > 0 \quad (20)$$

und zugleich

$$u^2 > u_{kr}^2 = \frac{(\varrho_n + \varrho_p + k^2 D)^2 [\varrho_n \varrho_p + k^2 D (c_p \varrho_p + c_n \varrho_n)]}{k_x^2 (\varrho_n c_n - \varrho_p c_p) [(\varrho_n + \varrho_p + k^2 D) (c_p - c_n) + \varrho_n c_n - \varrho_p c_p]} \quad (21)$$



liefern, mit

$$a_1 \equiv i \varrho_n + i k^2 D c_p + u k_x c_p, \\ a_2 \equiv i \varrho_p + i k^2 D c_n - u k_x c_n. \quad (15)$$

Für  $\varrho_n = \varrho_p = 0$  geht (14) in  $\omega^2 + (a_1 + a_2) \omega = 0$  über, und es treten keine Instabilitäten in Abwesenheit der Rekombination auf. Die Wurzeln von (14) haben die Form

$$\omega_{1,2} = c_1 - i c_2 \pm \sqrt{a + i b} \quad (16)$$

mit

$$c_1 \equiv u k_x \frac{c_n + c_p}{2}, \quad c_2 \equiv \frac{1}{2} (\varrho_n + \varrho_p + k^2 D), \\ b \equiv \frac{1}{2} u k_x [\varrho_n - \varrho_p + k^2 D (c_p - c_n)], \\ a \equiv \frac{1}{4} u^2 k_x^2 - \frac{1}{4} (\varrho_n - \varrho_p)^2 - k^4 D^2 + 2 k^2 D (\varrho_n + \varrho_p) + k^2 D (c_p \varrho_p + c_n \varrho_n),$$

und ergeben instabile Lösungen, wenn

$$\text{Im } \omega > 0 \quad (17)$$

ist. Die eine Wurzel liefert jedenfalls eine stabile Lösung, die andere liefert aber, falls

$$\text{Im } \sqrt{a + i b} > c_2, \quad \text{d. h. } b^2 > 4 c_2^2 (c_2^2 + a) \quad (18)$$

ist, eine instabile Lösung. Die letzte Ungleichung liefert schließlich die Bedingung

d. h. das elektrische Feld genügend groß ist. Auf Abb. 1 sind in den verschiedenen Bereichen die Vorzeichen der 3 runden Klammern aus (20) eingetragen. Die Bedingung (20) ist sicher in den doppelt schraffierten Gebieten erfüllt, und zum Teil (allerdings schwerer, d. h. nur bei noch höheren Feldern) auch in den einfach schraffierten. In den unschraffierten Gebieten herrscht Stabilität. Der kleinste, von den Randbedingungen noch zugelassene Wert  $k_{\min}^2$  von  $k^2$  ist aus den Randbedingungen an den Oberflächen  $z = L_z/2$  und  $y = L_y/2$  zu bestimmen. Die Kopplung der Gln. (12) und (13) durch die vorgehende Ausscheidung von  $E'$  zerstört auch hier, wie auch in A, die Gültigkeit des Theorems von SHOCK-

LEY, demgemäß die Oberflächenrekombination [die in Gl. (14) und (15) in den Gliedern  $D k_y^2$  und  $D k_z^2$  auftritt] einer Vergrößerung von  $\varrho_n$  und  $\varrho_p$  äquivalent ist. In den Ausdrücken für  $a_1$  und  $a_2$  ist das zwar der Fall, nicht aber im letzten Glied von (14).

Wir besprechen die Randbedingungen für 2 Fälle:

1) Fall der symmetrischen Oberflächenrekombination:

$$(n \mathbf{v}_n)_z' \equiv -\frac{e}{\nu_n} n^0 E_z' - \frac{T}{\nu_n} \frac{\partial n'}{\partial z} = \mp \Gamma (p^0 n' + n^0 p') \quad \text{bei } z = \mp L_z/2, \quad (22)$$

$$(p \mathbf{v}_p)_z' \equiv \frac{e}{\nu_p} p^0 E_z' - \frac{T}{\nu_p} \frac{\partial p'}{\partial z} = \mp \Gamma (p^0 n' + n^0 p') \quad \text{bei } z = \mp L_z/2. \quad (23)$$

Eliminiert man  $E_z'$ , so folgt

$$\frac{1}{p^0 n' + n^0 p'} \frac{\partial}{\partial z} (p^0 n' + n^0 p') = \pm \frac{\Gamma}{T} (\nu_n p^0 + \nu_p n^0) \quad \text{bei } z = \mp L_z/2. \quad (24)$$

Aus den Gln. (12) und (13) folgt aber (wie auch in A)

$$p' = \alpha n', \quad \alpha \equiv \frac{i\omega - \varrho_n + i u k_x c_p - D k^2 c_p}{i u k_x c_n + D k^2 c_n} = \frac{-i u k_x c_p + D k^2 c_p}{-i\omega - \varrho_p - i u k_x c_n - D k^2 c_n}, \quad (25)$$

d. h. die relative Amplitude und Phase von  $p'$  und  $n'$  liegt schon für jede der beiden Wellentypen fest, und man erhält

$$\frac{1}{n'} \frac{\partial n'}{\partial z} = \pm \gamma \quad \text{bei } z = \mp L_z/2; \quad \gamma \equiv \frac{\Gamma}{T} (\nu_n p^0 + \nu_p n^0). \quad (26)$$

Diese Bedingung erfüllt man mit einer Überlagerung von 2 Lösungen von entgegengesetzt gleichem  $k_z$

$$n' = A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}. \quad (27)$$

Tatsächlich ist dann

$$\begin{aligned} (i k_z - \gamma) e^{-ik_z L_z/2} A + (-i k_z - \gamma) e^{ik_z L_z/2} B &= 0 \\ (i k_z + \gamma) e^{ik_z L_z/2} A + (-i k_z + \gamma) e^{-ik_z L_z/2} B &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

und man erhält Lösungen nur für  $k_z^{(m)}$  Werte, die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{2 \varphi_m \psi}{\varphi_m^2 - \psi^2}, \quad \varphi_m \equiv k_z^{(m)} L_z, \quad \psi \equiv \gamma L_z \quad (29)$$

sind, die mit (31 A) übereinstimmt. Bezeichnet man mit  $0 < \eta_m < \pi/2$  und  $0 < \xi_m < \pi/2$  zwei Reihen von kleinen Zahlen, so daß  $\eta_{m+1} > \eta_m$  und  $\xi_{m+1} < \xi_m$  ist, so sieht man, daß:

a) für  $\psi < \pi/2$  die kleinste Wurzel  $\pm \varphi_1 \in (\psi, \pi/2)$  ist und  $\pm \varphi_2 = \pi + \xi_1$ ,  $\pm \varphi_3 = 2\pi + \xi_2$ ,  $\pm \varphi_{m+1} = m\pi + \xi_m, \dots$ ,

b) für  $\pi/2 < \psi < \pi$  die kleinste Wurzel  $\varphi_1 \in (\pi/2, \psi)$  ist und  $\pm \varphi_2 = \pi + \xi_1$ ,  $\pm \varphi_3 = 2\pi + \xi_2$ ,  $\pm \varphi_{m+1} = m\pi + \xi_m, \dots$ ,

c) für  $\frac{2r-1}{2}\pi < \psi < \frac{2r+1}{2}\pi$  die Wurzeln  $\pm \varphi_m = m\pi - \eta_m$  ( $m=0, 1, \dots, r$ ;  $\eta_0=0$ ) und  $\pm \varphi_{m+1} = m\pi + \xi_m$  ( $m=r, r+1, r+2, \dots$ ;  $\xi_0 > \psi$ ) vorhanden sind.

In allen Fällen ist also  $\varphi_1 < \pi$  und zusätzlich  $\varphi_1 > \pi/2$  für  $\psi > \pi/2$  und  $\psi < \varphi_1 < \pi/2$  für  $\psi < \pi/2$ , wie unter (31 A) bemerkt. Führen wir noch dieselben Betrachtungen für  $k_y$  durch, so folgt, daß in allen Fällen  $k_{\min}^2 < \pi^2(1/L_y^2 + 1/L_z^2)$  ist, und daß zusätzlich

$$k_{\min}^2 > \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad \text{für } \gamma > \frac{\pi}{2 L_y}, \quad \gamma > \frac{\pi}{2 L_z} \quad (30)$$

und

$$2\gamma^2 < k_{\min}^2 < \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad \text{für } \gamma < \frac{\pi}{2 L_y}, \quad \gamma < \frac{\pi}{2 L_z} \quad \text{gilt.} \quad (31)$$



Aus (21) ersieht man, daß für kleine  $\gamma$ -Werte (schwache Oberflächenrekombination  $\psi \ll \pi/2$  und  $\varphi_1 < \pi/2$  oder  $\ll \pi/2$ ) in den auf Abb. 1 doppelt schraffierten Gebieten die kritischen Feldstärken etwas herabsinken, jedenfalls aber über der Grenze

$$u_0^2 = \frac{(\varrho_n + \varrho_p + k_x^2 D)^2 \left[ \frac{\varrho_n \varrho_p}{k_x^2} + D(c_p \varrho_p + c_n \varrho_n) \right]}{(\varrho_n c_n - \varrho_p c_p) [(\varrho_n + \varrho_p + k_x^2 D)(c_p - c_n) + \varrho_n c_n - \varrho_p c_p]} \quad (32)$$

bleiben. In den einfach schraffierten Gebieten in Abb. 1 verläuft je eine Grenzlinie zwischen stabilen und instabilen Werten der Parameter  $\varrho_p/\varrho_n$ ,  $p^0/n^0$ , und die Lage dieser Grenzkurve ist von den minimalen  $k_y^2$ - und  $k_z^2$ -Werten, d. h. von der Stärke der Oberflächenrekombination abhängig. Für gewisse Parameterwerte wird es da kritische Werte der flächenhaften Rekombinationsgeschwindigkeit geben.

2) Fall der „freien“ Oberflächenrekombination:

$$-\frac{e}{v_n} n^0 E_z' - \frac{T}{v_n} \frac{\partial n'}{\partial z} = \mp s_n n' \text{ bei } z = \mp L_z/2, \quad (33)$$

$$\frac{e}{v_p} p^0 E_z' - \frac{T}{v_p} \frac{\partial p'}{\partial z} = \mp s_p p' \text{ bei } z = \mp L_z/2. \quad (34)$$

Hier sind die Rekombinationsraten entkoppelt, die Übergänge von Elektronen und Löchern zu und von Oberflächenzuständen sind als voneinander unabhängig angesehen. Eliminiert man wie zuvor  $E_z'$ , so erhält man unter Beachtung von (25) wieder

$$\frac{1}{n'} \frac{\partial n'}{\partial z} = \pm \gamma \text{ bei } z = \mp L_z/2, \quad (35)$$

nur daß nun  $\gamma$  komplex und vom angelegten Feld abhängig ist:

$$\gamma \equiv \frac{v_n s_n p^0 + \alpha v_p s_p n^0}{T(p^0 + \alpha n^0)} = \gamma_1 + i \gamma_2. \quad (36)$$

Dabei ist

$$\gamma_1 \equiv \frac{\varrho_p s_n v_n - \varrho_n s_p v_p + D k^2 (c_n - c_p) (s_n v_n + s_p v_p)}{[\varrho_p - \varrho_n + 2 D k^2 (c_n - c_p)] (s_n v_n + s_p v_p)}, \quad (37)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{u k_x (c_n - c_p) - \omega}{\varrho_p - \varrho_n + 2 D k^2 (c_n - c_p)}. \quad (38)$$

Für  $\omega$  ist  $\omega_1$  (mit  $\text{Im } \omega_1 > 0$ ) einzusetzen. Der Ansatz (27) und die Gln. (28) führen zur transzendenten Gleichung

$$\text{tg } \varphi_m = \frac{2 \varphi_m \text{Re } \psi}{\varphi_m^2 - |\psi|^2}, \quad \varphi_m \equiv k_z^{(m)} L_z, \quad \psi \equiv \gamma L_z, \quad (39)$$

an Stelle von (29). Hier tritt also das angelegte elektrische Feld auch in der Bestimmungsgleichung für  $k_z$  auf, wie das schon in A, § 2 der Fall war. Die Diskussion verläuft wie bei Gl. (29), nur tritt  $|\psi|$  an Stelle von  $\psi$ .

Abschließend möchte ich Herrn V. SERGIESCU für besonders nützliche Ratschläge, sowie Herrn Dr. R. GRIGOROVICI und Herrn Prof. V. NOVACU für das in fruchtbaren Diskussionen gezeigte Interesse herzlich danken.