

Eine stationäre zylindersymmetrische Lösung der Plasmagleichungen im eigenleitenden Halbleiter mit gleichen Beweglichkeiten der Ladungsträger

P. H. HANDEL *, R. S. IACOMI ** und M. NAUMESCU **

(Z. Naturforsch. 23 a, 482—485 [1968]; eingegangen am 4. März 1968)

Die Verteilung der Ladungsträger über den Querschnitt eines in bezug auf Elektronen und Löcher symmetrisch angenommenen, stromdurchflossenen Halbleiterdrahtes wird analytisch berechnet. Zugleich lassen sich Magnetfeld und Temperatur analytisch und graphisch ausdrücken. Dabei wurden die Rekombination der Ladungsträger, das eigene Magnetfeld des Stromes sowie die Wärmeleitung mit in Betracht gezogen. Die hier erzielte Näherung ist gerade im Fall großer Rekombinationsgeschwindigkeit und hoher Beweglichkeiten anwendbar, in dem andere analytische Lösungsmethoden nicht den Voraussetzungen entsprechen. Man bemerkt einen Anstieg der Trägerkonzentration an der Zylinderachse, dem aber die Rekombination dämpfend entgegenwirkt.

Die Grundgleichungen des Ladungsträger-Plasmas eines eigenleitenden Halbleiters sind weitgehend den bei Gasentladungen maßgebenden Plasmagleichungen analog. Physikalisch unterscheiden sich die beiden Systeme durch die beim Halbleiterplasma zusätzlich vorhandene Wechselwirkung mit dem Kristallgitter. Diese Wechselwirkung enthält einerseits die Elektron-Phonon-Streuung, andererseits die Erzeugung und Rekombination der Ladungsträger. Die Anwesenheit des Gitters äußert sich zusätzlich durch den Energiestrom der Phononen, der durch den Koeffizienten κ der Wärmeleitfähigkeit des Gitters beschrieben wird. Die Wechselwirkung mit den Phononen berücksichtigen wir, indem wir eine Reibungskonstante ν für die Reibung der Ladungsträger am Gitter einführen. Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient sind dann durch die Beziehungen

$$\mu = e/\nu, \quad D = kT/\nu$$

ausgedrückt und genügen der Einstein-Beziehung $\mu = eD/kT$.

Bezeichnen wir mit n , p , P_n , P_p , T_n , T_p , v_n , v_p Konzentration, Druck, Temperatur und Driftgeschwindigkeit der Elektronen und Löcher, so können wir die Kontinuitätsgleichungen (1), (2), die Diffusionsgleichungen (3), (4), die Gleichung von Ampère (5), die Gleichungen des adiabatischen Transportes von Plasmaelementen (6), (7) sowie die Wärmeleichung im Gitter (8) wie folgt ausschreiben:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n v_n) = -\varrho(n - n_0) + S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p v_p) = -\varrho(p - p_0) + S, \quad (2)$$

$$\nu n v_n = -en \left(\mathbf{E} + \frac{v_n}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla P_n, \quad (3)$$

$$\nu p v_p = ep \left(\mathbf{E} + \frac{v_p}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla P_p, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e(p v_p - n v_n), \quad (5)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_n}{T_n} \frac{dT_n}{dt}, \quad (6)$$

$$\frac{dP_p}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_p}{T_p} \frac{dT_p}{dt}, \quad (7)$$

$$(p v_p - n v_n) e \mathbf{E} + \kappa \nabla^2 T = 0. \quad (8)$$

Hier bedeuten n_0 und p_0 die Gleichgewichtskonzentrationen der Elektronen und Löcher, γ den Adiabatenkoeffizienten oder einen ihm naheliegenden polytropischen Koeffizienten, $\mathbf{E}$ das angelegte elektrische Feld, $\mathbf{B}$ das eigene Magnetfeld des Stromes, T die Gittertemperatur und S ein Quellglied an der Halbleiteroberfläche. In der Energiebilanzgleichung (8) wurde die Erzeugungs- und Rekombinationswärme vernachlässigt, die wenig beiträgt und leicht mit in Betracht gezogen werden kann. Sie würde nur ein einfaches Zusatzglied in Gl. (35) liefern.

In vorliegender Arbeit wollen wir dieses System im Fall eines unendlich langen Halbleiterzylinders mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R (Halbleiterdraht) im stationären Fall mit gegebener Oberflächentemperatur $T(R)$ lösen.

Eine Lösung, die analog zu der von THONEMANN und COWHIG¹ für das Gasentladungsplasma aufgestellten Formel ist, wurde schon in einer früheren Arbeit gefunden². Diese Lösung berücksichtigte aber

* Institut Max von Laue—Paul Langevin, Außenstelle Garching bei München, Reaktorgelände.

** Institut für Bauwesen, Bukarest, Bul. Lacul Tei.

¹ P. THONEMANN u. W. COWHIG, Proc. Phys. Soc. London B **64**, 345 [1951].

² P. H. HANDEL, Rev. Roumaine Physique **7**, 407 [1962].

weder die radiale Änderung der Temperatur noch die Rekombination der Ladungsträgerpaare in den Gln. (1) und (2). Sie wurde übrigens unter der vereinfachenden Annahme eines isothermen radialen Transports an Stelle der Gln. (6) und (7) abgeleitet. Außerdem ist noch eine Lösung von BÖER, JAHNE und NEBAUER³ für den thermischen Durchschlag bekannt, in der jedoch weder das eigene Magnetfeld noch die Rekombination in Betracht gezogen werden, sowie eine numerische Lösung von GLICKSMAN⁴. Andere analytische Lösungen der Plasmagleichungen in stationärem Betrieb sind uns nicht bekannt und wir versuchen nun, für den eigenleitenden Halbleiter eine Lösung aufzustellen, die gerade in jenen Fällen gut anwendbar sein soll, in den die anderen auf Schwierigkeiten treffen.

Da Eigenleitung und gleiche Beweglichkeiten vorausgesetzt sind, herrscht völlige Symmetrie zwischen den beiden Ladungsträgertypen und somit ist

$$p = n, \quad p_0 = n_0, \quad P_p = P_n = \frac{1}{2} P, \quad T_p = T_n \approx T. \quad (9)$$

Dabei ist P der Gesamtdruck und T wurde der Plasmatemperatur gleichgesetzt. Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{v}_+ = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{v}_- = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n \quad (10)$$

erhalten wir aus den Gln. (1) bis (7) im stationären Betrieb die Gleichungen

$$\nabla(n \mathbf{v}_+) = -\varrho(n - n_0) - h(n - n_0) \delta(r - R), \quad (11)$$

$$2 \nu n \mathbf{v}_+ = \frac{e}{c} n \mathbf{v}_- \times \mathbf{B} - \nabla P, \quad (12)$$

$$\nu n \mathbf{v}_- = 2 e n (\mathbf{E} + \mathbf{v}_+ / c \times \mathbf{B}), \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4 \pi}{c} e n \mathbf{v}_-, \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_n \nabla P = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} k n \mathbf{v}_n \nabla T, \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_p \nabla P = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} k n \mathbf{v}_p \nabla T, \quad (16)$$

worin $h > 0$ ein Oberflächen-Rekombinationskoeffizient ist und $\delta(z)$ die δ -Funktion bedeutet.

Aus Gl. (15) und (16) folgt durch Addition:

$$\mathbf{v}_+ \nabla P = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} k n \mathbf{v}_+ \nabla T. \quad (17)$$

In Zylinderkoordinaten r, φ, z erhält das System (11) bis (17) und (8) die Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r n v_{+r}) \\ = -\varrho(n - n_0) - h(n - n_0) \delta(r - R), \end{aligned} \quad (18)$$

$$2 \nu n v_{+r} = -\frac{e}{c} n v_{-z} B_\varphi - \frac{dP}{dr}, \quad (19)$$

$$\nu v_{-z} = 2 e E, \quad (20)$$

$$r \frac{d}{dr} (r B_\varphi) = \frac{4 \pi}{c} n v_{-z}, \quad (21)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} k n \frac{dT}{dr}, \quad (22)$$

$$e n v_{-z} E + \frac{\kappa}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (23)$$

Dabei liegt das angelegte elektrische Feld in Richtung der z -Achse. Aus Gl. (11) und (12) folgt, daß v_+ klein ist und daß seine einzige von Null verschiedene Komponente v_{+r} nur wegen der Rekombination überschüssiger Ladungsträgerpaare im zentralen Gebiet des Zylinders erscheint. Die Lorentzkraft [das erste Glied rechts in Gl. (12)] treibt nämlich die in den peripherischen Gegenden erzeugten Ladungsträger beider Vorzeichen radial ins Zentrum, wo sie rekombinieren. Da v_{+r} klein ist, wird der von ihm in Gl. (13) verursachte Hall-Effekt (letztes Glied rechts) vernachlässigt. Jedenfalls hat laut Gl. (13) $\mathbf{v}_-$ sowie die elektrische Stromdichte die Richtung der z -Achse. Die Identifizierung der Gittertemperatur T mit der Plasmatemperatur ist im Fall schwacher stationärer Strombelastungen oder kleiner elektrischer Felder E gerechtfertigt. Die Ableitung von Gl. (22) aus Gl. (17) setzt übrigens das Vorhandensein eines radialen Teilchenstroms (was nur für $\varrho \neq 0$ möglich ist) voraus, da andernfalls die Kürzung durch v_{+r} nicht mehr erlaubt ist. Diese Bedingungen – von Null verschiedene Volumenrekombinationsgeschwindigkeit und schwache elektrische Felder – kennzeichnen die hier erstrebte Näherung als diametral der in ² durchgeführten entgegengesetzt.

Eliminieren wir die Geschwindigkeiten v_{+r} und v_{-z} , so erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{e^2 E}{c \nu^2} n B_\varphi + \frac{r}{2 \nu} \frac{dP}{dr} \right] \\ = \varrho(n - n_0) + h(n - n_0) \delta(r - R), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{2 e^2}{\nu} E^2 n + \frac{\kappa}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) = \frac{8 \pi e^2}{\nu c} E n, \quad (26)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{2 \gamma}{\gamma - 1} k n \frac{dT}{dr}. \quad (27)$$

³ K. W. BÖER, E. JAHNE u. E. NEBAUER, Phys. Status Solidi **1**, 231 [1961].

⁴ M. GLICKSMAN, Jap. J. Appl. Phys. **3**, 354 [1964].

Die eckige Klammer aus Gl. (24) stellt die Stromdichte der Elektron-Loch-Paare mit umgekehrtem Vorzeichen dar. Integrieren wir einmal Gl. (24) unter Benützung der Stufenfunktion $\Theta(x)$ ($=0$ für $x < 0$ und $=1$ für $x > 0$), so folgt mit Hilfe von Gl. (26):

$$\frac{e^2 E}{c \nu^2} n B_\varphi + \frac{1}{2 \nu} \frac{dP}{dr} = \frac{\varrho \nu c}{8 \pi e^2 E} B_\varphi - \frac{\varrho n_0}{2} r + h \frac{R}{r} [n(R) - n_0] \Theta(r - R). \quad (28)$$

Die Integrationskonstante entspricht der radialen Stromdichte der Ladungsträgerpaare an der Zylinderachse und wurde somit hier gleich Null gesetzt. Bei $r = R + 0$ im Kühlmedium ist die Stromdichte Null:

$$\frac{\varrho \nu c}{8 \pi e^2 E} B_\varphi(R) - \frac{\varrho n_0}{2} R + h [n(R) - n_0] = 0. \quad (29)$$

Integrieren wir ähnlicherweise Gl. (25) mit (26) unter Nullsetzung der radialen Gitter-Wärmestromdichte bei $r = 0$, so folgt:

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{c E}{4 \pi \kappa} B_\varphi. \quad (30)$$

Aus den Gln. (28), (26) und (27) ergibt sich dann (bei $r < R$):

$$\frac{1}{8 \pi \nu} \frac{B_\varphi}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) - \frac{\varrho \nu c^2}{8 \pi e^2 E} B_\varphi + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k c}{8 \pi e^2 E} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) \frac{dT}{dr} = - \frac{\varrho n_0 r}{2}. \quad (31)$$

Beachten wir auch Gl. (30), so folgt:

$$\frac{e^2}{c \nu^2 \varrho} \frac{B_\varphi}{r^2} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) + \frac{B_\varphi}{r E} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k c}{4 \pi \nu \varrho \kappa} \frac{B_\varphi}{r^2} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) = - \frac{4 \pi e^2 n_0}{c \nu}. \quad (32)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\frac{B_\varphi}{r E} \equiv u, \quad 2 \ln \frac{r}{R} \equiv \xi, \quad (33)$$

$$\frac{2 E^2}{\nu \varrho} \left[\frac{e^2}{\nu c} - \frac{c k \gamma}{4 \pi \kappa (\gamma - 1)} \right] \equiv a, \quad \frac{4 \pi e^2 n_0}{c \nu} \equiv b, \quad (34)$$

erhält man aus Gl. (32) schließlich:

$$a u \frac{du}{d\xi} = -a u^2 + u - b. \quad (35)$$

Aus (33) ersieht man, daß u positiv ist, unabhängig vom Vorzeichen des Feldes E . Da die axiale elektrische Stromdichte bei $r = 0$ ($\xi = -\infty$) begrenzt sein soll, folgt in der unmittelbaren Nähe der Achse $B_\varphi \sim r$ und somit strebt u für $r \rightarrow 0$ einen

begrenzten Wert $u_1 \neq 0$ an, wobei du/dr ebenfalls begrenzt ist. Folglich ist bei $r = 0$:

$$\frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi = -\infty} \equiv \frac{r}{2} \frac{du}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (36)$$

und damit folgt aus (35), daß u_1 eine Wurzel des Trynoms $T(u) = -a u^2 + u - b$ ist. Wenn r von Null ausgehend wächst, wird sich u im durch das Vorzeichen von $du/d\xi$ gegebenen Sinne verändern, wobei $du/d\xi$ selbst aus Gl. (35) bestimmt ist. Daraus ist ersichtlich, daß man eine Lösung $u(\xi)$ nur für $a > 0$ erhalten kann, wobei u_1 die kleinere von den beiden (positiven) Wurzeln des Trynoms $T(u)$ ist (siehe Abb. 1). Der Fall $a > 0$ ist gerade der in

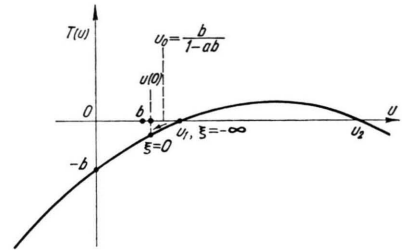


Abb. 1. Die physikalischen u -Werte befinden sich auf der u -Achse nur zwischen u_1 und $u(0)$. Dabei entspricht u_1 der Zylinderachse und $u(0)$ der Oberfläche.

Abb. 1 zugrunde gelegte. Laut Gl. (34) setzt dieser Fall große Beweglichkeiten (kleine ν -Werte) voraus. Die Wurzel u_1 ist:

$$u_1 = (1 - \sqrt{1 - 4ab})/2a. \quad (37)$$

Bezeichnen wir mit E_k das kritische angelegte Feld, für das die Beziehung

$$4ab = 1 \quad (38)$$

gilt. Nur für $|E| < E_k$ sind die Wurzeln real und unsere Methode anwendbar. Im eigenleitenden Germanium⁵ erhält man mit $\kappa = 5,86 \cdot 10^7$ erg/cm s grd, $\varrho = 500$ s⁻¹ und $\nu = 5,62 \cdot 10^{-16}$ erg s/cm² einen positiven a -Wert und $E_k = 1000$ V/cm. Der Wert von E_k wächst proportional mit dem Rekombinationskoeffizienten ϱ . Ist die Volumrekombination schwach, so ist der radiale Strom der Elektron-Loch-Paare klein und die Adiabatangleichung (22) kann nur im Falle sehr kleiner Felder angewendet werden. Im umgekehrten Fall können wir den radialen Transport isotherm annehmen und die Ergebnisse aus ² anwenden.

⁵ Ein für die Anwendbarkeit dieser Methode ideales Halbleitermodell sollte z. B. $\kappa = 5,86 \cdot 10^6$ erg/cm s grd, $\varrho = 500$ s⁻¹ und $\nu = 5,62 \cdot 10^{-14}$ erg s/cm² aufweisen und nähert sich dem InSb-Fall.

Aus Gl. (29) folgt mit (33) und (34):

$$u - b + \frac{2h}{\varrho R} \left[u + \frac{du}{d\xi} - b \right] = 0 \quad \text{für } r=R, \quad \xi=0. \quad (39)$$

Diese Randbedingung ergibt unter Beachtung von Gl. (35)

$$u^2 - \left[b - \frac{2h}{a\varrho R} (1-ab) \right] u - \frac{2hb}{a\varrho R} = 0 \quad (\xi=0), \quad (40)$$

woraus für $\xi=0$ noch

$$u(0) = \frac{b}{2} - \frac{h}{a\varrho R} (1-ab) + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{a^2\varrho^2 R^2} (1-ab)^2 + \frac{hb(1-ab)}{a\varrho R}} \quad (41)$$

folgt. Das Wurzelvorzeichen wurde so gewählt, daß Gl. (41) für $h/\varrho R \rightarrow 0$ in erster h -Ordnung

$$u(0) \approx b \left(1 + \frac{2h}{\varrho R} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} b \quad (\xi=0) \quad (42)$$

ergibt. Für $|E| < E_k$ folgt aus den Ungleichungen $0 < 4ab < 1$ mit Hilfe von Gl. (37), daß $u_1 > b$ ist.

Folglich sinkt im Fall $h=0$ u vom zu $r=0$ ($\xi = -\infty$) gehörigen Wert u_1 monoton [$du/d\xi \neq 0$ laut Gl. (35)] bis zum der Oberfläche ($r=R, \xi=0$) entsprechenden Wert $u=b$ (siehe Pfeilrichtung auf Abb. 1). Ist $h \neq 0$, so sinkt u von u_1 nur bis zum von Gl. (41) gegebenen Wert $u(0)$, der jedenfalls den Wert $u_0 \equiv b/(1-ab)$ ($> b$) nie überschreitet:

$$b < u(0) < u_0. \quad (43)$$

Dieses Verhalten der Funktion $u(\xi)$ entspricht einem Anwachsen der Strom- und Trägerdichte an der Zylinderachse, das durch die magnetischen Kräfte verursacht wird.

Bevor wir die analytische Lösung untersuchen, wollen wir noch den Wert von u ermitteln, der dem Radius $r=r_0$ entspricht, an dem der radiale Gesamtstrom der Ladungsträgerpaare maximal ist. Da die eckige Klammer aus Gl. (24) gerade den gesamten Teilchenstrom darstellt, erhalten wir den gesuchten Wert mit Hilfe von Gl. (28) aus der Beziehung:

$$\frac{d}{dr} [r^2(u-b)] \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \text{oder} \quad du/d\xi = b-u. \quad (44)$$

Aus Gl. (35) folgt dann für u gerade der vorhin eingeführte Wert u_0 :

$$u \Big|_{r=r_0} = \frac{b}{1-ab} \equiv u_0. \quad (45)$$

Es ist auch leicht, die Ungleichung $u_1 > u_0$ zu demonstrieren. Der radiale Gesamtstrom wächst also von einem zu h proportionalen Oberflächenwert bis zu $r=r_0$, wo er maximal ist, und sinkt dann wieder, um an der Zylinderachse zu verschwinden.

Um Gl. (35) zu integrieren, schreiben wir:

$$d\xi = \frac{a u du}{T(u)} = - \frac{u_1}{u_1-u_2} \frac{du}{u-u_1} + \frac{u_2}{u_1-u_2} \frac{du}{u-u_2}, \quad (46)$$

mit $T(u) = -a(u-u_1)(u-u_2)$. Wir erhalten:

$$M \frac{r^2}{R^2} = |u-u_1|^{u_1/(u_2-u_1)} \cdot |u-u_2|^{-u_2/(u_2-u_1)}. \quad (47)$$

Die Integrationskonstante M folgt aus der Bedingung (41) - wonach an der Oberfläche $u=u(0)$ ist, und es ergibt sich:

$$\frac{r}{R} = \left| \frac{u-u_1}{u(0)-u_1} \right|^{u_1/2(u_2-u_1)} \left| \frac{u-u_2}{u(0)-u_2} \right|^{-u_2/2(u_2-u_1)}. \quad (48)$$

Um graphisch die direkte Abhängigkeit $u(r)$ darzustellen, gibt man u verschiedene im Intervall $[u(0), u]$ begriffene Werte und errechnet aus Gl. (48) die zugehörigen r -Werte.

Aus Gl. (26) ist weiter die Konzentration der Ladungsträgerpaare berechenbar:

$$n = \frac{\nu c}{4\pi e^2} \left[u(r) + \frac{du}{d\xi} \right]. \quad (49)$$

Mit Hilfe von Gl. (35) vereinfacht sich das zu:

$$n = \frac{\nu c}{4\pi e^2} \frac{u-b}{a u}. \quad (50)$$

Für $u=u_1$ folgt der Achsenwert und für das aus Gl. (41) bestimmte $u(0)$ folgt der Oberflächenwert von n . Die Temperatur erhält man aus Gl. (30):

$$T(r) = T(R) + \frac{c E^2}{4\pi \kappa} \int_r^R r u(r) dr, \quad (51)$$

wobei $T(R)$ als vorgegeben betrachtet ist. Das Magnetfeld ist

$$B_\varphi = E r u.$$

Alle physikalisch interessanten Größen sind somit durch das in Gl. (48) implizit definierte u ausgedrückt.